

# Concurs de resolució gràfica de «sangakus» amb el GeoGebra

**Carlos Giménez Esteban**

Col·legi Sant Gabriel de Viladecans. Associació Catalana de GeoGebra  
carlos.gimenez@gmail.com

## Resum

En aquest article es presenta una experiència d'aula consistent en l'organització d'un concurs de resolució gràfica, mitjançant el *GeoGebra*, de problemes geomètrics presentats a l'estil dels clàssics *sangakus* japonesos, per a alumnes de matemàtiques de batxillerat. La situació de partida dels alumnes inclou un treball previ habitual amb el *GeoGebra* en diverses modalitats, tant d'una manera dirigida com en forma de suport de les explicacions del professor, com un ús autònom dels alumnes a partir de petites propostes de descoberta. Els objectius didàctics d'aquesta experiència són despertar la curiositat dels alumnes per la bellesa de les propietats geomètriques i reforçar la seva confiança i la seva destresa en l'ús del *GeoGebra*.

## Abstract

*This paper describes the organization of a GeoGebra-based graphical problem-solving competition as a classroom experience for secondary school mathematics students, specifically comprising the resolution of geometric problems presented in the form of classic Japanese Sangaku. Prior to the competition students would have carried out different activities using GeoGebra on a regular basis, both in a supervised classroom context as a support to lessons and independently while working on short discovery assignments. The educational objectives of this experience are set on inspiring students' curiosity for the beauty of geometric properties and expanding their trust and skill in using GeoGebra.*

## Objectius i context

És evident que cal tenir clars de bon començament quins són els objectius didàctics que s'intenten assolir amb qualsevol nova activitat que portem a l'aula.

El context de partida de l'experiència que presento és el següent:

- L'activitat es va plantejar per als alumnes de la matèria de Matemàtiques de primer de batxillerat de la modalitat científicotecnològica.

- La idea era poder treballar amb ells aspectes de geometria plana més complexos que els que abordem habitualment.

D'altra banda, aquests alumnes estan habituats a l'ús del GeoGebra en diferents modalitats, tan a partir de construccions que es projecten a l'aula com d'una manera individual, per a resoldre situacions senzilles en diferents àmbits (anàlisi, probabilitat, àlgebra, geometria, etc.).

### Hi ha vida més enllà de la recta d'Euler?

Es podria dir que aquesta reflexió va ser, probablement, el meu punt de partida. A la pràctica, quan treballem la geometria plana a primer de batxillerat no acostumem a anar més enllà de la determinació de la recta d'Euler, bàsicament per les limitacions que ens imposen els reduïts coneixements algebraics dels nostres alumnes, que els impedeixen resoldre situacions gaire més complexes.

Aleshores, la pregunta és òbvia: «Atès que els limitats coneixements d'àlgebra dels nostres alumnes són el principal obstacle per poder aprofundir una mica més en conceptes de geometria, si disposem d'una eina com el GeoGebra, que ens permet esquivar la dificultat algebraica, potser val la pena sacrificar el rigor d'una demostració formal a canvi d'analitzar i descobrir noves situacions de les quals podem obtenir un cert grau de certesa amb una comprovació informàtica?».

La resposta que dono a aquesta pregunta és afirmativa. Crec que, en aquest nivell educatiu, limitar el tipus de situacions geomètriques a les quals exposem els nostres alumnes a aquelles que siguin capaços de manipular algebraicament amb la soltesa suficient implica una doble renúncia.

Per una banda, els alumnes amb millors aptituds són privats de la possibilitat de plantejar-se altres situacions que sens dubte els estimularien intel·lectualment i els permetrien descobrir la varietat i la bellesa de les propietats i regularitats geomètriques.

Per una altra banda, per als alumnes que presenten més dificultats en la resolució de problemes algebraics, la possibilitat de participar activament en la descoberta de propietats interessants fent ús de la seva intuïció i del GeoGebra com a assistent que resol les dificultats els permet recuperar part de la motivació perduda.

### Demostrar vs. comprovar i representar vs. construir

Si acceptem que el GeoGebra és un recurs excepcional per a la didàctica de les matemàtiques, el fet que els nostres alumnes esdevinguin competents en el seu ús passa a ser un objectiu pedagògic en si mateix, pels avantatges que els reportarà en el seu treball amb les matemàtiques en general.

Un dels primers aprenentatges que ens proporciona el treball habitual amb eines de geometria dinàmica com el GeoGebra és comprendre la diferència entre *representar* una situa-

ció geomètrica i *construir-la* (definint cada nou objecte a partir de les seves relacions amb els objectes anteriors). Poques situacions resulten més instructives per a alguns alumnes que veure els efectes tan diferents que provoca el desplaçament d'un punt sobre una representació (les propietats observades desapareixen) o sobre una construcció (les propietats observades es mantenen invariants).

La qüestió és ben senzilla: si ens limitem a treballar en aquest camp allò que els nostres alumnes poden demostrar, reduïm tant les situacions que els presentem que la idea de la geometria que es formen és força pobre.

Per tant, demostrem tot el que podem i comprovem moltes més coses; deixem que es vegin obligats a aplicar la seva intuïció per a plantejar i resoldre situacions noves i atractives al marge de les equacions que les descriuen. Que conjeturin, descobreixin i provin sense sentir-se encotillats per les obligacions que imposa l'àlgebra.

## **Adopta, adapta, crea i comparteix**

Qualsevol professional de l'ensenyament al segle XXI que estimi de veritat la seva feina hauria d'actuar seguint alguna idea similar a aquesta, pel bé dels seus alumnes, del seu centre educatiu, de la comunitat de docents i pel seu propi desenvolupament professional.

### **Adoptar**

Òbviament, en un món hiperconnectat com el nostre, la primera tasca que qualsevol docent ha de dur a terme quan es planteja introduir alguna novetat a la seva aula és cercar, investigar, consultar, indagar; en suma, observar exemples produïts per altres professionals.

Els mitjans són obvius: per una banda, hem de tenir presència en les xarxes socials (especialment a Twitter), i per una altra banda, hem de participar en totes les trobades de professorat que ens sigui possible (afortunadament, se n'organitzen moltes al nostre entorn).

En el cas d'aquesta experiència, per poder dur-la a terme vaig adoptar recursos provinents d'aquests dos àmbits ja indicats més amunt:

- A través de Twitter (@gogeometry), vaig conèixer l'existència del web GoGeometry, mantingut des del Perú pel Sr. Antonio Gutiérrez, en el qual es pot trobar una col·lecció de problemes geomètrics enorme i creixent dia rere dia (en el moment de tancar aquest escrit conté 1.067 problemes), alguns de clàssics i altres de generats per ell mateix.
- Vaig sentir parlar per primera vegada dels *sangakus* a en Ramon Nolla en la XIII Jornada de didàctica d'ABEAM (Barcelona, 13 de novembre de 2010). Aleshores em van semblar una curiositat, amb potencial evident, però amb un problema d'aplicació: jo no em sentia capaç de plantejar problemes prou rics i no volia limitar-me a treballar només els problemes clàssics recuperats. En aquest moment vaig recordar el web abans esmentat.

## Adaptar

A partir d'aquí, la idea es va formar automàticament, quasi sense voler: el que havia de fer era combinar la idea japonesa dels *sangakus*, la font pràcticament inesgotable de problemes que suposava el web GoGeometry i l'eina essencial en la meua activitat a l'aula, el GeoGebra.

Adaptar no vol dir apropiar-se de les idees d'altres i fer-les passar per pròpies.

Per aquest motiu, la meua primera preocupació va ser contactar amb l'autor dels problemes, el Sr. Antonio Gutiérrez, i exposar-li la meua idea per tal de demanar-li autorització per a utilitzar el seu material amb la referència corresponent. També em vaig adreçar a en Ramon Nolla per fer-lo partícip de la meua iniciativa.

Cal dir que en tots dos casos vaig rebre una resposta positiva i encoratjadora, i em van autoritzar a utilitzar els seus materials amb la citació corresponent.

## Crear

Arribats a aquest punt, em preocupava la manera de donar a tot plegat una forma que aconseguís:

- Donar un sentit a l'activitat que partís dels objectius didàctics plantejats.
- Aprofitar de la millor manera possible el potencial dels tres recursos disponibles: *sangakus*, GoGeometry i el GeoGebra.
- Resultar engrescador i atractiu per als alumnes.

La solució que vaig trobar, i que aquí presento, va consistir en l'organització d'un concurs de resolució de problemes geomètrics mitjançant l'ús del GeoGebra presentats a l'estil dels *sangakus*.

## Compartir

La primera mesura que cal prendre és la de publicar els materials a Internet sota una llicència del tipus CreativeCommons, que, sota unes restriccions mínimes, permet a qualsevol usuari de fer-ne ús.

El pas següent ha de ser la presentació en alguna trobada de professorat. En aquest sentit, aquesta experiència d'aula es va presentar per primer cop en format de comunicació a les V Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra (Barcelona, 16 de febrer de 2013).

Posteriorment, amb la participació d'en Pep Bujosa, president de l'Associació Catalana de GeoGebra, aquesta idea va donar lloc a la realització d'un taller a les XVI JAEM (Jornades per a l'Aprenentatge i l'Ensenyament de les Matemàtiques, Palma de Mallorca, 4 de juliol de 2013).

Aquesta experiència ha estat reconeguda amb un accésit al premi Maria Antònia Canals 2014 convocat per la Feemcat, conjuntament amb la SBM-Xeix, la SEMCV Al-Khwaritzmi i la SCM en la categoria d'ensenyament secundari, atorgat el 4 d'octubre de 2014.

En aquests moments, a petició d'en Sergi Muria, està pendent l'adaptació d'aquest material per a la seva incorporació a l'Aplicació de Recursos al Currículum (ARC) gestionat pel CESIRE-CREAMAT.

## Descripció de l'experiència

La meua idea va ser la següent: «Intentaré que els meus alumnes treballin amb algunes propietats geomètriques relativament complexes, aprofitant les possibilitats que ens dona el GeoGebra per superar les dificultats algebraiques i utilitzant una col·lecció de problemes produïts al Perú, presentant-los de manera original a l'estil dels *sangakus* japonesos, i ho faré en un format motivador com és un concurs».

### Què son els *sangakus*?

Els *sangakus* són tauletes de fusta que contenien problemes matemàtics, generalment basats en la geometria, que es penjaven als sostres dels temples budistes i dels santuaris sintoistes al Japó de l'època Edo (1603-1867).

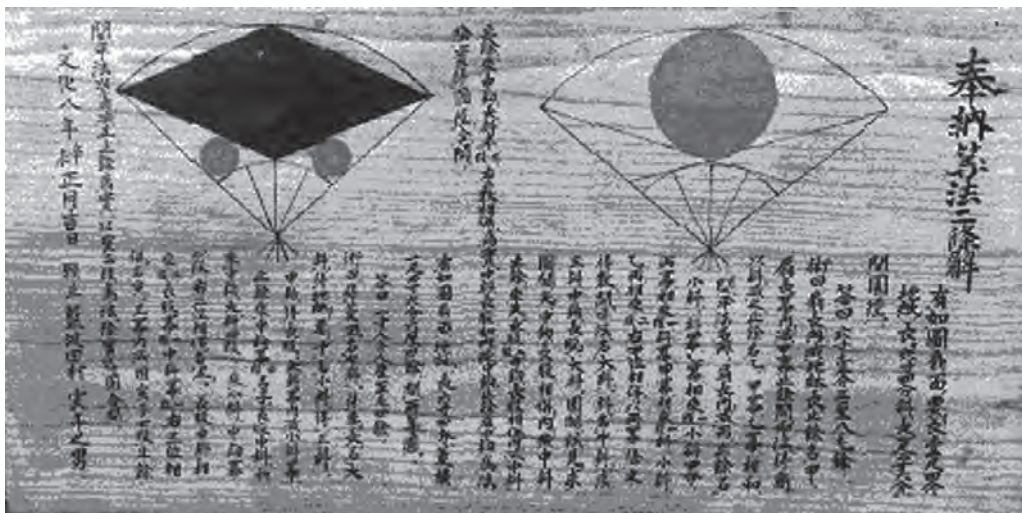


Figura 1. Un exemple de *sangaku* clàssic.

### Construcció de les tauletes: una mica de bricolatge

Un cop vaig tenir clara la idea i havia triat els problemes d'acord amb els criteris pedagògics que exposaré més endavant, el que calia era intentar generar un material atractiu i original presentat d'una manera diferent i que permetés justificar el referent dels *sangakus*.

Per fer-ho, em van caldre uns quants materials senzills, que es poden trobar amb facilitat, i una mica de bricolatge (al qual no sóc especialment aficionat).

El resultat van ser unes tauletes prou convincents i que, un cop penjades al sostre del passadís de l'escola, van contribuir força a engrescar els alumnes.

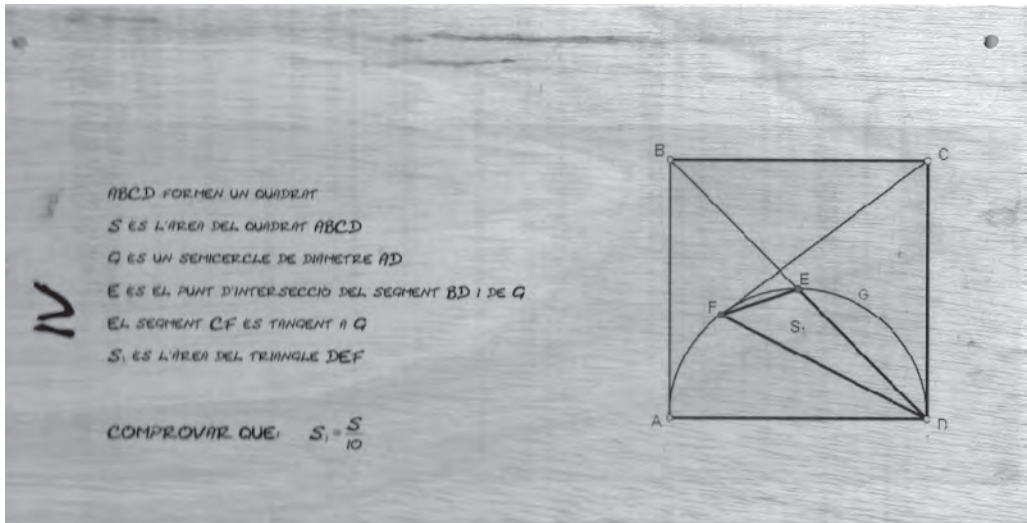


Figura 2. Un exemple dels *sangakus* utilitzats al concurs.

## Posada en escena

Vaig penjar del sostre les tauletes de fusta amb els *sangakus*, al passadís de batxillerat, d'una manera volgudament irregular, per tal que donessin una ambientació que pogués fer pensar en com es devien veure els originals en un santuari sintoista.

Un fet molt important per contribuir a crear expectació va ser el de muntar la instal·lació un divendres a la tarda, quan els alumnes ja havien marxat. D'aquesta manera, quan van arribar dilluns es van trobar el passadís canviat, com per art de màgia.

No em vaig identificar com l'autor del muntatge ni vaig explicar-ne el motiu fins a última hora del matí. D'aquesta manera, els alumnes ---i molts professors--- van passar-se el matí intrigats i fent hipòtesis (sospitant de mi, però sense entendre a què treia cap tot plegat). Crec que és difícil aconseguir més predisposició i receptivitat per part dels alumnes amb una estratègia més convencional.

En el moment d'explicar el significat del muntatge, vaig fer públiques les bases del concurs tant en cartells com en format web, on els alumnes podien consultar amb més comoditat els enunciats dels problemes, i vaig resoldre personalment a classe alguns exemples extra de *sangakus* per donar orientacions.

Les tauletes es van estar ben bé dos mesos penjades del sostre. Durant aquest temps, els alumnes que volien ja estaven mirant de resoldre els problemes plantejats i, per tant, hi havia de tant en tant converses entre ells sobre el tema.

## Bases del concurs

- Al llarg del curs 2012-2013 es portarà a terme un concurs de resolució de *sangakus* amb el GeoGebra entre l'alumnat de matemàtiques de primer de batxillerat del centre que hi vulguin participar.
- Resoldre correctament un *sangaku* proposat s'entén com construir amb el GeoGebra un *aplet* dinàmic que doni resposta a la pregunta plantejada i que, en moure els seus diversos elements, mantingui constant la propietat comprovada.
- El concurs constarà de dues fases.

En la primera fase es plantejaran cinc *sangakus*.

Per superar aquesta primera fase, caldrà lliurar almenys quatre *sangakus* resolts correctament en el termini d'un mes.

Qualsevol alumne que compleixi els requisits anteriors es classificarà automàticament per a la segona fase i rebrà un diploma de finalista.

La segona fase del concurs tindrà lloc en una sessió presencial. En aquell moment es plantejaran dos *sangakus*.

Els i les primeres alumnes que lliurin correctament resolt cadascun dels dos *sangakus* proposats rebran respectivament 10, 5 i 3 punts. Es proclamarà guanyador o guanyadora del concurs l'alumne o alumna amb la puntuació total més alta. En cas d'empat, es proposarà un tercer *sangaku* i es proclamarà guanyador o guanyadora el primer o la primera alumna que el lliuri correctament resolt.

## Exemples utilitzats

Un element fonamental per tal que aquesta iniciativa no tan sols tingui èxit, sinó que simplement tingui sentit, resideix en una correcta selecció dels problemes a plantejar, aplicant un criteri bàsic: «Els problemes plantejats han de consistir en la comprovació de propietats geomètriques, relativament complexes, que es puguin deduir d'una manera unívoca a partir de pocs objectes inicials i de relacions elementals entre ells i que es puguin posar de manifest utilitzant eines del GeoGebra que els alumnes coneguin».

A continuació es mostren alguns *sangakus* utilitzats en el concurs, amb la numeració corresponent a la col·lecció de la qual provenen, del web GoGeometry.

### Problema #112

$ABCD$  formen un quadrat

$S$  és l'àrea del quadrat  $ABCD$

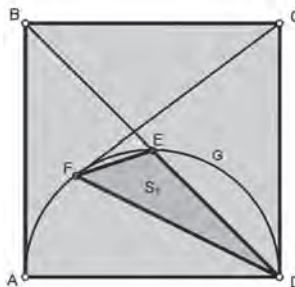
$G$  és un semicercle de diàmetre  $AD$

$E$  és el punt d'intersecció del segment  $BD$  i de  $G$

El segment  $CF$  és tangent a  $G$

$S_1$  és l'àrea del triangle  $DEF$

**Comproveu que:**  $S_1 = \frac{S}{10}$





**Problema #164**

$ABCD$  formen un paral·lelogram

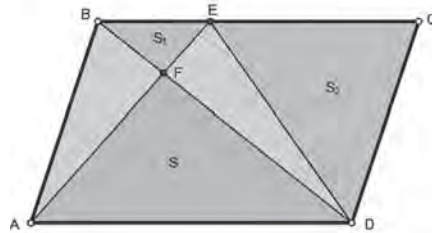
$E$  és un punt qualsevol del segment  $BC$

$S$  és l'àrea del triangle  $AFD$

$S_1$  és l'àrea del triangle  $BFE$

$S_2$  és l'àrea del triangle  $CDE$

**Comproveu que:**  $S = S_1 + S_2$

**Resultat del concurs**

D'una població total de 26 alumnes, 14 (un 54%) van participar al concurs i tots van presentar les respostes correctes als cinc *sangakus* plantejats a la primera fase dins del termini establert.

Tot i que la resta d'alumnes no es va animar a participar directament en el concurs, sí que van viure aquells dies l'activitat, van veure els exemples que vaig resoldre a classe i en alguns casos van discutir amb els seus companys les estratègies de resolució.

**Conclusions**

Les conclusions que he extret d'aquesta experiència parlen especialment de l'aspecte clau: la *motivació*, tant la dels meus alumnes engrescats mirant de resoldre problemes com la meva sentint les seves discussions comparant les diferents estratègies per resoldre'ls.

- El que han obtingut els meus alumnes:
  - En primer lloc, i probablement el més important, s'ho han passat bé treballant problemes de matemàtiques.
  - Per a la gran majoria d'alumnes ha resultat una sorpresa descobrir l'enorme quantitat de propietats geomètriques que es poden obtenir a partir d'elements senzills.
  - Els alumnes més brillants s'han sentit temptats a demostrar algunes de les propietats que anaven comprovant, cosa que amb major o menor èxit han aconseguit en alguns casos.
  - Alguns alumnes generalment poc hàbils amb l'àlgebra s'han sentit motivats a participar i en alguns casos han estat capaços de resoldre els reptes plantejats, la qual cosa els ha suposat un reforç positiu d'autoestima matemàtica que generalment no tenen.
  - Els alumnes han millorat sens dubte la seva habilitat i seguretat en l'ús del GeoGebra i han demanat o fins i tot han investigat pel seu compte altres eines i possibilitats del programa.
  - La revisió per part dels alumnes d'algunes errades comeses, així com la cerca de la millor estratègia per resoldre cada construcció, els ha ajudat a ser autocrítics amb les seves produccions.



- El que he obtingut jo:
  - En primer lloc, i probablement el més important, m'ho he passat bé plantejant problemes de matemàtiques.
  - He aconseguit fer visibles les matemàtiques i provocar curiositat en alumnes i companys de claustre poc predisposats, superant el rebuig inicial que aquesta disciplina provoca en moltes persones.
  - He pogut introduir alguns referents d'història de les matemàtiques que han obert debats i que han portat a treballar en altres moments a partir de materials audiovisuals diversos.
  - He pogut donar un valor fora de l'àmbit estrictament acadèmic al raonament, el rigor i l'autocrítica com a eines fonamentals en el treball matemàtic.
  - He pogut presentar propietats geomètriques complexes d'una manera que ha generat receptivitat per part dels alumnes i que els ha portat a implicar-se personalment en la seva resolució i a superar l'habitual actitud passiva que mostren en molts casos.

Sense cap dubte, un dels millors indicadors de l'èxit d'una iniciativa com aquesta s'obté quan els alumnes, com en aquest cas, et demanen: «L'any que ve en farem un altre?».

## Bibliografia

Bujosa, J., Giménez, C. (2013). Resolución gráfica de sangakus con GeoGebra como recurso para trabajar la geometría plana. XVI JAEM. Lloc web: <http://prezi.com/n6wspao8cnpj> [Consulta: 20 de juliol de 2014]

Giménez, C. (2012). Primer Campionat de resolució de sangakus amb el GeoGebra. Col·legi Sant Gabriel de Viladecans. Lloc web: <http://carlosgimenez.info/sangakus> [Consulta: 14 de juliol de 2014]

— (2013). Concurs de resolució gràfica de sangakus amb el GeoGebra. V Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra. Lloc web: <http://prezi.com/jealiy24dwki> [Consulta: 21 de juliol de 2014]

Gutiérrez, A. (2008). From the land of the incas. Lloc web GoGeometry: <http://www.gogeometry.com> [Consulta: 12 de juliol de 2014]

Hohenwarter, M. (2005). Lloc web oficial de GeoGebra: <http://www.geogebra.org/> [Consulta: 14 de juliol de 2014]

Nolla, R. (2009). Sangakus. Contemplació i raó. Lloc web de .XTEC: <http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/Sangakus3b.pdf> [Consulta: 23 de juliol de 2014]

